Exposé 2 : Représentations de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$

Jérôme

26 Juin 2024

0.0.1 Le cas $\mathfrak{sl}_2$

Nous allons maintenant étudier à la main les représentations de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Ceci concluera le présent document et donnera les premières intuitions à ceux qui souhaiteront découvrir par eux-mêmes la théorie de plus haut poids des représentations des algèbres de Lie semi-simple.

On rappelle les générateurs de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$:

$$x := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \; y := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \; h := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et les relations :

$$[x, y] = h, \; [h, x] = 2x, \; [h, y] = -2y.$$

En particulier, h agit diagonalement sur $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

Soit V une représentation de L. On peut alors montrer que h agit également diagonalement sur V (il est ici important que l'on soit sur $\mathbb{C}$, plus précisément que l'on travaille sur un corps algébriquement clos). On peut alors décomposer V en sous-espaces propres :

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{C}} V_\lambda$$

où $V_\lambda := \{v \in V | \quad h \cdot v = \lambda v\}$. Si λ n'est pas une valeur propre de h, alors $V_\lambda = \{0\}$. Si λ est bien une valeur propre de h, alors λ est appelé **poids** de h dans V et V_λ est appelé **espace de poids** de poids λ de V.

Les espaces de poids vont nous permettre de décrire l'ensemble des représentations de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Nous allons vite constater qu'il y a des conditions sur les poids possibles.

Lemme 0.0.1. *Soit $v \in V_\lambda$. Alors $x \cdot v \in V_{\lambda+2}$ et $y \cdot v \in V_{\lambda-2}$.*

Démonstration. On utilise la définition du crochet dans $\mathrm{End}(V)$:

$$h \cdot x \cdot v = [h, x] \cdot v + x \cdot h \cdot v = 2x \cdot v + \lambda x \cdot v$$

d'où $x \in V_{\lambda+2}$. Le calcul est le même pour y. $\square$

Remarque Puisque l'on regarde des représentations de dimension finie, le résultat précédent permet de voir facilement que les opérateurs x et y sont nilpotents.

Définition 0.0.2. *Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $v \in V_\lambda$ non nul tel $x \cdot v = 0$. On dit que v est un* ***vecteur maximal***[1]*.*

Exemple 1. *Pour la représentation adjointe, il est clair que x est un vecteur maximal, de poids 2.*

Puisque $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ est une algèbre de Lie semi-simple (car simple), le théorème de Weyl nous assure que toute représentation de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ est complètement réductible : il suffit donc d'étudier ses représentations irréductibles. Procédons à la classification de celles-ci.

Soit $v_0 \in V_\lambda$ un vecteur maximal. On pose alors

$$v_{-1} := 0; \quad v_i := \frac{1}{i!} y^i \cdot v_0.$$

Lemme 0.0.3. *On peut décrire les actions des générateurs de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ sur chacun de ces vecteurs :*

1. $h \cdot v_i = (\lambda - 2i)v_i$;
2. $x \cdot v_i = (\lambda - i + 1)v_{i-1}$;
3. $y \cdot v_i = (i+1)v_{i+1}$.

Remarque À ce stade, l'action des opérateurs peut rappeler aux plus physiciens d'entre vous les **opérateurs d'échelles**. L'opérateur de création correspond à x et l'opérateur d'annihilation correspond à y. On commence à voir poindre le lien avec l'étude des états d'énergie des particules.

Démonstration.

1. On utilise le lemme 0.0.1 plusieurs fois. On peut faire une récurrence rapide :

$$\begin{aligned}
h \cdot v_i &= \frac{1}{i!} h \cdot y^i \cdot v_0 \\
&= \frac{1}{i} y \cdot h \cdot \frac{1}{(i-1)!} y^{i-1} \cdot v_0 + \frac{1}{i!} [h, y]\, y^{i-1} \cdot v_0 \\
&= \frac{1}{i} y \cdot h \cdot v_{i-1} + \frac{1}{i!} 2y^i \cdot v_0 \\
&= \frac{1}{i} (\lambda - 2(i-1)) y \cdot v_{i-1} + 2v_i \\
&= (\lambda - 2i)v_i.
\end{aligned}$$

2. Ce point découle de la définition des vecteurs v_i.
3. On procède une nouvelle fois par récurrence.

□

1. D'après la terminologie de [**Humphreys**]. On peut retrouver la terminologie de vecteur "primitif".

La première formule assure le fait que les v_i non nuls sont des vecteurs linéairement indépendants de V. Or V est de dimension finie : on peut donc définir $m \in \mathbb{N}$ le plus petit entier pour lequel $v_m \neq 0$ et $v_{m+1} = 0$.

On note alors $V' := \mathrm{Vect}\,(v_i)_{0 \leqslant i \leqslant m}$. Grâce au lemme, on sait qu'il s'agit d'une sous-représentation de V, non nulle. Par irréductibilité de V, on a ainsi nécessairement :

$$V = \mathrm{Vect}\,(v_i)_{0 \leqslant i \leqslant m}\,.$$

Regardons en particulier l'effet de x sur v_{m+1}. La formule 3. du lemme donne :

$$x \cdot v_{m+1} = (\lambda - m)v_m.$$

Puisque $v_{m+1} = 0$ et $v_m \neq 0$ par définition, on a nécessairement $\lambda = m$. En fait, le poids d'un vecteur maximal est nécessairement un entier naturel non nul (égal à la dimension de V -1). On l'appelle alors **plus haut poids** de V. De plus, le lemme assure également que chaque espace de poids est de dimension 1. Par ailleurs, puisqu'il ne peut y avoir qu'un seul vecteur de plus haut poids ($\lambda = \dim V - 1$), il ne peut y avoir qu'un seul vecteur maximal, à scalaire près.

On obtient alors la caractérisation :

Théorème 0.0.4. *Soit V une représentation irréductible de dimension finie de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.*

1. *Soit $m := \dim V - 1$. Alors*

$$V = \bigoplus_{\mu} V_\mu$$

pour $\mu = -m, -(m-2), \ldots, m-2, m$. En particulier, chaque V_μ est de dimension 1.

2. *V admet un unique (à scalaire près) vecteur maximal, et celui-ci est de poids m.*

3. *L'action de L sur V est donnée explicitement comme précédemment. Ceci implique en particulier qu'il existe au plus une représentation irréductible de L de dimension $m+1$ pour $m \in \mathbb{N}$.*

Reste une dernière question naturelle : existe-t-il une représentation irréductible de dimension $m+1$ pour tout $m \in \mathbb{N}$? Il suffit pour cela de vérifier que les équations du lemme 0.0.1 suffisent pour définir une structure de représentation irréductible.

Démonstration. Écrivons les matrices associées aux opérateurs x, y, h en tant qu'endomorphismes de V (dans la base $(v_0, \ldots, v_m)$).

$$H = \mathrm{diag}\,(m, m-2, \ldots, -(m-2), -m)$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & m & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & m & 0 \end{pmatrix}$$

On peut alors vérifier que ces matrices vérifient les mêmes relations que les générateurs x, y, h de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, assurant que V est bien une représentation de L. Pour son caractère irréductible, on constate que l'action des générateurs à partir d'une combinaison linéaire de vecteurs de la base permet de récupérer tous les autres (par exemple en appliquant x autant de fois que nécessaire pour récupérer v_m, puis en appliquant y m fois pour récupérer tous les autres), donc la représentation n'admet pas de sous-représentation non triviale et est bien irréductible. $\square$

Corollaire 0.0.4.1. *Les représentations irréductibles de dimension finie de* $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ *sont paramétrées par les entiers naturels.*

Remarque

- La théorie de poids s'étend à n'importe quelle algèbre de Lie semi-simple. L'action de $h \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ est remplacée par l'action d'une sous-algèbre de Lie abélienne maximale de L, apppelée **algèbre de Cartan**. Il n'y a pas unicité des algèbres de Cartan, mais elles sont toutes de même dimension et conjuguées entre elles.

- On pourrait imaginer une notion de plus bas poids (pour laquelle c'est y qui annule le vecteur maximal, au lieu de x). Dans le cas des représentations de dimension finie, c'est la même chose (par exemple pour $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, on voit bien que v_m est un vecteur de plus bas poids). Néanmoins, en dimension infinie, ces deux notions ne coïncident pas nécessairement, et les deux caractérisent des familles de représentations irréductibles différentes.